收敛和弱收敛的一个等价刻画

December 24, 2020

1 收敛的等价刻画

Theorem 1.1. 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的有界数列. $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到x_0 当且仅当$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意收敛子列均收敛到x_0.

Proof. " $\Rightarrow$ " 显然成立, 下证" $\Leftarrow$ ". 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意收敛子列均收敛到x_0. 反设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 不收敛到x_0, 则存在$\varepsilon_0 \in (0,\infty)$ 使得对$\forall N \in \mathbb{N}$, 存在$k > N$ 使得

$$|x_k - x_0| > \varepsilon_0.$$

故可取子列$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得对$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon_0.$$

$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是有界数列, 故存在收敛子列, 不妨记为其本身. 由" $\Leftarrow$ " 的假设知$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到x_0, 矛盾. 故$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到x_0, Theorem 1.1 证毕. □

Remark 1.2. 若$\mathbb{R}^n$ 中的有界数列不收敛, 则存在两个子列收敛到不同的极限.

2 弱收敛的等价刻画

Lemma 2.1. 设E 是自反空间$\mathcal{X}$ 的子集. 则E 有界当且仅当E 弱列紧.

Remark 2.2. 自反空间中的有界数列必有弱收敛子列.

Theorem 2.3. 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是自反空间$\mathcal{X}$ 中的有界数列. 则$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到x_0 当且仅当$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意弱收敛子列均弱收敛到x_0.

Proof. " $\Rightarrow$ " 显然成立, 下证" $\Leftarrow$ ". 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意弱收敛子列均弱收敛到x_0. 反设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 不弱收敛到x_0, 则存在$f \in \mathcal{X}^*$ 使得

$$f(x_k) \nrightarrow f(x_0), \quad \text{as } k \to \infty.$$

注意到$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界, 从而$\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界. 由此及Remark 1.2 知, 存在收敛子列$\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和$\{f(x_{p_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \neq \lim_{k\to\infty} f(x_{p_k}). \tag{1}$$

又由Remark 2.2 知, $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和$\{x_{p_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 均有弱收敛子列, 不妨记为其本身. 由" $\Leftarrow$ "的假设知

$$x_{n_k} \rightharpoonup x_0, \quad x_{p_k} \rightharpoonup x_0, \qquad \text{as } k \to \infty.$$

则由(1) 知,

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \neq \lim_{k\to\infty} f(x_{p_k}) = f(x_0).$$

矛盾. 从而$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到x_0, Theorem 2.3 证毕. □

Remark 2.4. 若自反空间中的有界数列不弱收敛, 则存在两个子列弱收敛到不同的极限.