复分析总结

March 23, 2020

标注来源的时候, 英文表示Stein 的复分析, 如: Theorem 2.2. 中文表示铁爷的书, 如: 命题1.2.2.

1 解析函数基本性质

以下均源自[1].

Definition 1.1 (p.7)**.** 开集$\Omega \subset \mathbb{C}$ 被称为连通的, 若不存在两个不交的非空开集Ω_1 和Ω_2 使得

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

$\mathbb{C}$ 中的连通开集被称为区域.

Definition 1.2 (p.93)**.** 粗略地讲, 称区域Ω 中拥有相同端点的两条曲线是同伦的, 若这其中一条能不离开区域Ω 连续的变换成另一条曲线.

Definition 1.3 (p.96)**.** 称区域Ω 是单连通的, 若Ω 中拥有相同端点的任意两条曲线是同伦的.

Definition 1.4 (p.20)**.** 粗略地讲, 一个光滑或者分段光滑曲线被称为是闭的, 若曲线首尾相连. 一个光滑或者分段光滑曲线被称为是简单的, 若曲线不自交.

Theorem 1.5 (Theorem 2.2, p.351)**.** *设Γ 是一段简单的, 闭的, 分段光滑的曲线. 则Γ^c 等于两个不交区域的并. 特别的, 这两个区域一个是有界单连通区域, 称它为Γ 的内部; 另一个是无界单连通区域, 称它为Γ 的外部.*

铁爷书中区域的定义太乱了, 我觉得按他的意思, 如果明确指出是区域, 那就是连通开集.

Theorem 1.6 (命题1.2.2)**.** *设f 定义在开集$\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的复值函数, $a \in \Omega$. 若f 在点$a \in \Omega$ 处实可微, 则f 在点$a \in \Omega$ 处复可微当且仅当$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|_a = 0$. 若$f$ 在点$a \in \Omega$ 处复可微, 则f 在点$a \in \Omega$ 处实可微且$\frac{\partial f}{\partial z}|_a = f'(a)$.*

Remark 1.7. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 是复可微与否的关键. $\frac{\partial f}{\partial z}$ 就是导数.

Theorem 1.8 (定理1.2.3)**.** 设ω 是有界开集且$f \in H(\omega) \cap C^1(\overline{\omega})$, 则

$$\int_{\partial\omega} f(z)dz = 0.$$

Remark 1.9. 上面这个是柯西定理很一般的形式, 比较抽象, 下面是一个更直观的版本.

设Ω 改为单连通开集, 由柯西定理及定理2.1.8 $H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ 知, 对任意简单的, 闭的, 分段光滑曲线$\Gamma \subset \Omega$,

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = 0.$$

大致是这个意思, 曲线的条件可能有偏差.

Theorem 1.10 (定理1.2.4)**.** 设ω 是有界开集且$z \in \omega$. 若$f \in C^1(\overline{\omega})$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{\omega} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}d\lambda(\zeta).$$

若$f \in H(\omega) \cap C^1(\overline{\omega})$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Remark 1.11. 上面这个是柯西公式很一般的形式, 比较抽象, 下面是一个更直观的版本.

设Ω 改为单连通开集, 由柯西公式及定理2.1.8 $H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ 知, 对任意简单的, 闭的, 分段光滑曲线$\Gamma \subset \Omega$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

大致是这个意思, 曲线的条件可能有偏差.

Theorem 1.12 (定理2.1.8)**.** 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, 则

$$H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega).$$

Remark 1.13. 设Ω 是区域, 则

$$H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap \{\text{无穷可微函数}\},$$

即全纯函数无穷可微且一阶偏导连续.

Proof. 由定理2.1.8 知, $H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, 即全纯函数一阶偏导连续. 由此及定理1.2.6 知,

$$H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega) \subset \{\text{无穷可微函数}\}.$$

因此全纯函数无穷可微且一阶偏导连续. □

Theorem 1.14 (定理1.1.12)**.** *设X 是连通空间且$E \subset X$ 既开又闭, 则$E \in \{\emptyset, X\}$.*

Remark 1.15. 定理1.1.12 是更一般的结论, 不过没有这个直观. 此结论可用于证明超级有用的最大模定理.

Theorem 1.16 (定理1.2.10)**.** *设Ω 是有界开集且$f \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, 则存在$z_0 \in \partial\Omega$ 使得$|f(z_0)| = \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$.*

Remark 1.17. 记$M := \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$. 则$f$ 有两种可能. (i) $|f| \equiv M$; (ii) 对$\forall z \in \Omega$, $|f(z)| < M$.

Theorem 1.18 (Hadamard, 铁爷p.11)**.** *设$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, 幂级数*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

的收敛半径R 满足

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

若$R \in (0,\infty]$, 则级数在$D(a,R)$ 中内闭一致收敛. 若$R \in [0,\infty)$, 则级数在$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > R\}$ 中发散.

Theorem 1.19 (定理1.2.11 和定理1.2.14)**.** *设Ω 是有界开集. $f \in H(\Omega)$ 当且仅当对$\forall a \in \Omega$, 存在一个圆盘$D(a,r) \subset \Omega$ 使得对$\forall z \in \Omega$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

的幂级数.

Remark 1.20. 由这个定理也能看出来全纯函数无穷可微. 注意, 导数是能算出来的, 直接对积分内部求导即可.

Theorem 1.21 (定理1.2.16, Corollary 4.5)**.** *设$f \in H(\mathbb{C})$ 且有界, 则f 是常值函数.*

Remark 1.22. 著名的Liouville 定理, 必须牢记. 称f 是整函数, 若$f \in H(\mathbb{C})$.

Theorem 1.23 (定理1.2.18)**.** *(零点的孤立性). 设Ω 是区域(连通开集), $f \in H(\Omega)$ 且f 不恒等于0. 记$Z(f) := \{z \in \Omega : \ f(z) = 0\}$, 则$Z(f)$ 在Ω 中没有极限点.*

(零点处函数的分解). 设$a \in Z(f)$, 则存在唯一正整数$m \in \mathbb{N}$ 和非0 函数$g \in H(\Omega)$, 使得对$\forall z \in \Omega$,

$$f(z) = (z-a)^m g(z).$$

Theorem 1.24 (Theorem 4.8)**.** *看待零点的孤立性的另一个角度. 设Ω 是区域(连通开集), $f \in H(\Omega)$. 若存在点$z_0 \in \Omega$ 和序列$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Z(f) \setminus \{z_0\}$ 使得*

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

则$f \equiv 0$.

Remark 1.25. 零点的孤立性, 非常有用. 由零点的孤立性, 容易看出$Z(f)$ 至多可数.

Theorem 1.26 (Theorem 1.2.20)**.** 设$a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R < \infty$,

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z-a| < R\}.$$

若$f \in H(\Omega)$, 则存在序列$\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ 使得, 对$\forall z \in \Omega$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a).$$

其中对$\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta,$$

其中$\rho \in (r, R)$, 由柯西公式, 上式右边的积分与ρ 的选取无关.

Remark 1.27. Laurent 展开, 非常有用. 没有坏点, 就用泰勒, 有坏点, 就只能用Laurent 展开了.

References

[1] E. M. Stein and R. Shakarchi, Complex Analysis, Princeton University Press, 2010.