Bump Function, Test Function, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

February 21, 2020

Bump function, 或者说test function, 是指$\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的光滑函数(无穷阶可微). 将全体bump function 记为$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

注: 应该有推广的情况, 暂时不关心这个.

Example 0.1. 定义$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\phi(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

ϕ 是*bump function.*

Example 0.1 中ϕ 是bump function 的证明有点麻烦, 暂且略去. 下面给出赫赫有名的Urysohn 引理.

Theorem 0.2. 设$F \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, $G \subset \mathbb{R}^n$ 是开集且$F \subset G$. 存在$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得$f$ 的值域为$[0,1]$ 且f 在F 中恒等于1, 在G^c 中恒等于0.

Proof. 设$\delta := d(F, G^c)$, 不难证明$\delta > 0$. 定义$U := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,F) < \frac{\delta}{2}\}$. 用Example 0.1 中的$\phi$ 来构造卷积核φ, 对$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon \in (0,\infty)$,

$$\varphi(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) / \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

则$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是非负函数, $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. 取$\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{2})$, 此时对$\forall x \in \mathbb{R}^n$ 且$|x| \geq \frac{\delta}{2}$, $\varphi(x) = 0$.

取$f := 1_U * \varphi$, 则$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 注意到对$\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = (1_U * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_U(x-y)\varphi(y)dy. = \int_{|y|<\frac{\delta}{2}} 1_U(x-y)\varphi(y)dy.$$

因此f 的值域为$[0,1]$ 且f 在F 中恒等于1, 在G^c 中恒等于0. $\square$