Calderón-Zygmund Decomposition

April 27, 2020

Calderón-Zygmund Decomposition 由Calderon 和Zygmund 在[1] 中引入.

1 Calderón-Zygmund Lemma

Theorem 1.1 (Calderón-Zygmund Lemma)**.** 设f 是非负可积函数, 则对任意给定的正常数λ, 存在两两不交的二进方体族$\{Q_j\}_{j\in J}$ 使得

(i) 对$a.e.$ $x \notin \bigcup_{j\in J} Q_j$, $f(x) < \lambda$;

(ii) $|\bigcup_{j\in J} Q_j| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;

(iii) 对$\forall j \in J$,

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(t)dt \leq 2^n\lambda.$$

1.1 本人觉得很自然的证明

此证明来自[2, Lemma 1.2]. 在证明Calderón-Zygmund Lemma 之前, 首先回顾一下经典的Lebesgue differentiation theorem.

Theorem 1.2 (Lebesgue differentiation theorem)**.** 设$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则对$a.e.$ $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t) - f(x)|dt = 0.$$

Remark 1.3. 显然对a.e. $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(t)dt = f(x).$$

事实上, 里面的$B(x,r)$ 可以换成$B \ni x$, 球也可以换成方体.

Proof of Theorem 1.1. 设$\mathcal{D}$ 为二进方体全体, 考虑$\mathcal{D}$ 的子集

$$D_{f,\lambda} := \left\{Q \in \mathcal{D} : \frac{1}{|Q|}\int_Q f(t)dt > \lambda\right\}.$$

称Q_0 是$D_{f,\lambda}$ 中的极大方体, 若对$\forall Q \in D_{f,\lambda} \setminus \{Q_0\}$, $Q_0 \not\subset Q$. 将$D_{f,\lambda}$ 中的全体极大方体记为$\{Q_j\}_{j\in J}$. 下证$\{Q_j\}_{j\in J}$ 满足(i), (ii), (iii). 先证(iii), 对$\forall j \in J$, 设$\widetilde{Q}_j \in \mathcal{D}$ 满足$Q_j \subset \widetilde{Q}_j$ 且$|\widetilde{Q}_j| = 2^n|Q_j|$. 由此及$Q_j$ 是$D_{f,\lambda}$ 中的极大方体知

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(t)dt \le \frac{|\widetilde{Q}_j|}{|Q_j|}\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{|\widetilde{Q}_j|} f(t)dt \le 2^n\lambda.$$

由此及$Q_j \in D_{f,\lambda}$ 知, (iii) 成立. 再证(ii), 由(iii) 知, 对$\forall j \in J$,

$$|Q_j| < \frac{1}{\lambda}\int_{Q_j} f(t)dt. \tag{1}$$

断言, $\{Q_j\}_{j\in J}$ 两两不交. 事实上, 对$\forall i, j \in J$ 且$i \neq j$, Q_i, Q_j 是$D_{f,\lambda}$ 中的极大方体, 故$Q_i \not\subset Q_j$ 且$Q_j \not\subset Q_i$. 由此及$Q_i, Q_j \in \mathcal{D}$ 知, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, 断言成立. 由断言及(1) 知,

$$\left|\bigcup_{j\in J} Q_j\right| = \sum_{j\in J}|Q_j| < \sum_{j\in J}\frac{1}{\lambda}\int_{Q_j} f(t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_{\bigcup_{j\in J} Q_j} f(t)dt \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

(ii) 成立. 最后证(i) 成立, 对$\forall x \notin \bigcup_{j\in J} Q_j$, 由$\{Q_j\}_{j\in J}$ 的构造知, 对$\forall Q \in \mathcal{D}$ 且$Q \ni x$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(t)dt \le \lambda. \tag{2}$$

否则$Q \in D_{f,\lambda}$, 从而$x \in \bigcup_{j\in J} Q_j$, 矛盾. 由Lebesgue differentiation theorem 及(2) 知, 对a.e. $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \lim_{Q\ni x, |Q|\to 0^+}\frac{1}{|Q|}\int_Q f(t)dt \le \lambda.$$

(i) 成立. 综上, Theorem 1.1 证毕. □

1.2 一种挺奇怪的证明

该证明来自[3, Theorem 2.11]. 首先交代一下符号. $\mathcal{D}$ 是二进方体全体, $\mathcal{D}_k$ 是第k 层二进方体. 对$\forall\, k \in \mathbb{Z}, f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$E_k f(x) := \sum_{Q\in\mathcal{D}_k}\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q f(t)dt\right]1_Q(x).$$

E_k 算子是连续函数的离散化. 由此可以定义二进极大函数

$$M_d f(x) := \sup_{k\in\mathbb{Z}}|E_k f(x)|.$$

Theorem 1.4. 对于E_k 和M_d, 有如下两个结论:

(i) M_d 是弱$(1,1)$ 型算子;

(ii) 若$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则对$a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{k\to\infty} E_k f(x) = f(x).$$

证明的关键是利用二进极大算子, 二进极大函数也是一个经典的极大函数, 跟正常的方体极大函数有些不一样.

Proof of Theorem 1.1. 略. □

2 Calderón-Zygmund Decomposition

暂时没有用到, 鸽!

References

[1] A. Calderon and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, Acta Math. 88 (1952), 85–139.

[2] S. Kislyakov, N. Kruglyak, Extremal Problems in Interpolation Theory, Whitney-Besicovitch Coverings, and Singular Integrals, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

[3] J. Duoandikoetxea, Fourier analysis, American Mathematical Soc., 2001.